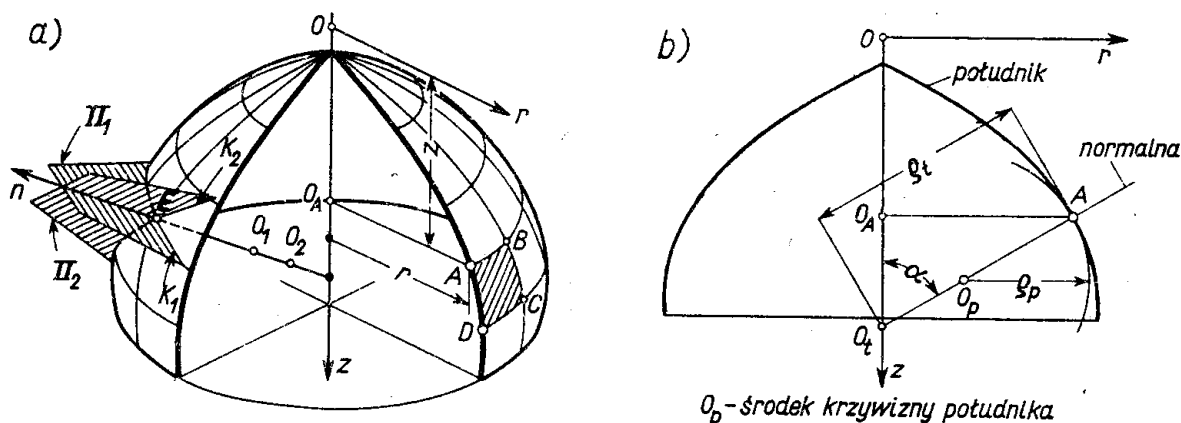


12.4. Błonowy stan napięcia w osiowosymetrycznych powłokach

Geometrię powłoki takiej opisujemy podając kształt $r(z)$ przekroju południkowego powierzchni środkowej, w skrócie południka, oraz grubość ścianki δ (rys. 12.21). Do tego opisu należy także pojęcie *głównych promieni krzywizny*⁽¹⁾, którymi dla powłoki osio-

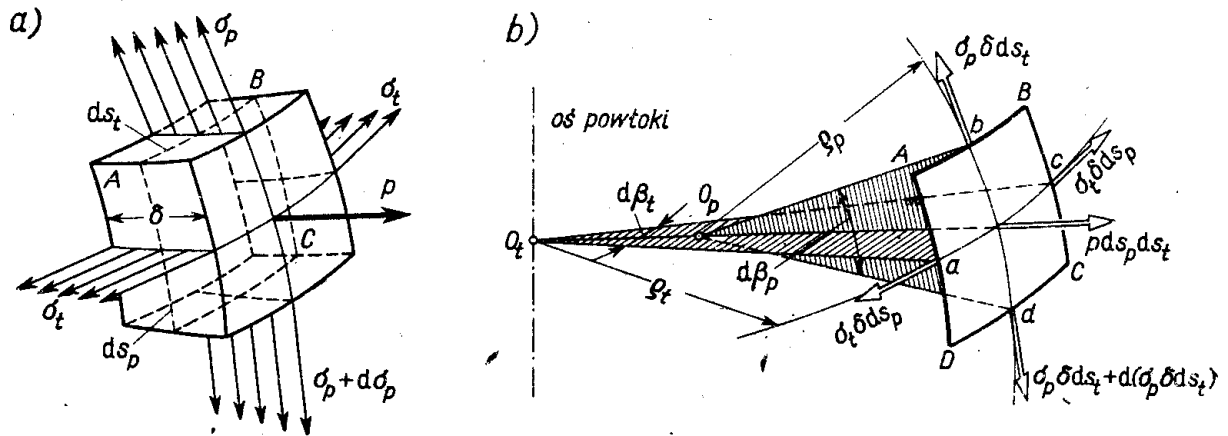


Rys. 12.21. Geometria i oznaczenia powłoki osiowosymetrycznej

wosymetrycznej są: promień krzywizny ρ_p południka w badanym punkcie A oraz promień ρ_t przekroju powierzchni środkowej płaszczyzną normalną do tej powierzchni, a jednocześnie prostopadłą do płaszczyzny południka. W geometrii różniczkowej dowodzi się, że ρ_t jest równy odcinkowi normalnej $\overline{AO_t}$ między powierzchnią a osią Oz powłoki. Na ogół te promienie ρ_p i ρ_t są funkcjami współrzędnej z określającej położenie badanego punktu A powłoki.

Analizę wytrzymałościową rozpoczniemy od opisu obrazu naprężeń działających na boki elementu $ABCD$ wyciętego przekrojami: południkowymi AD i BC oraz stożkowymi AB i DC (rys. 12.22a). Przy osiowosymetrycznym obciążeniu ciśnieniem p powstają naprężenia południkowe σ_p i obwodowe σ_t , które z racji osiowej symetrii ustroju są główne. Jeśli powłoka jest cienka, a ciśnienie p łagodnie zmienne lub stałe, to można założyć, że wzdłuż grubości naprężenia σ_p i σ_t są stałe natomiast, tak jak i p , mogą być one funkcjami z . Wypadkowe siły na bokach elementu (rys. 12.22b) są równe iloczynom wartości σ przez odpowiednie pola. I tak na bokach AD i BC mamy siły $\sigma_t \delta ds_p$ leżące w płaszczyźnie O_1ac i tworzące ze sobą kąt $d\beta_t = ds_t/\rho_t$. Podobnie na boku AB działa siła $\sigma_p \delta ds_t$, a na DC zwiększona o pewien przyrost siła $\sigma_p \delta ds_p + d(\sigma_p \delta ds_p)$ leżące w płaszczyźnie południka O_6bd i tworzące ze sobą kąt $d\beta_p = ds_p/\rho_p$. Rzutując na normalną n te wszystkie siły

⁽¹⁾ Jeśli przez normalną n w punkcie E przesunąć szereg płaszczyzn Π_1, Π_2, \dots , to otrzymujemy szereg różnych krzywych przecięcia K_1, K_2, \dots . Każdej z nich odpowiada inne koło krzywizny, z tym że środki O_1, O_2, \dots tych kół leżą na normalnej n . W całej mnogości promieni krzywizny ρ_1, ρ_2, \dots jeden ρ_{\max} jest maksymalny, drugi ρ_{\min} – minimalny. Odpowiadające tym *głównym promieniom* ρ_{\max} i ρ_{\min} płaszczyzny Π są do siebie prostopadłe (patrz W.I. Smirnow, *Matematyka wyższa*, t.2, Warszawa 1960, PWN).



Rys. 12.22. Obraz naprężeń w elemencie powłoki

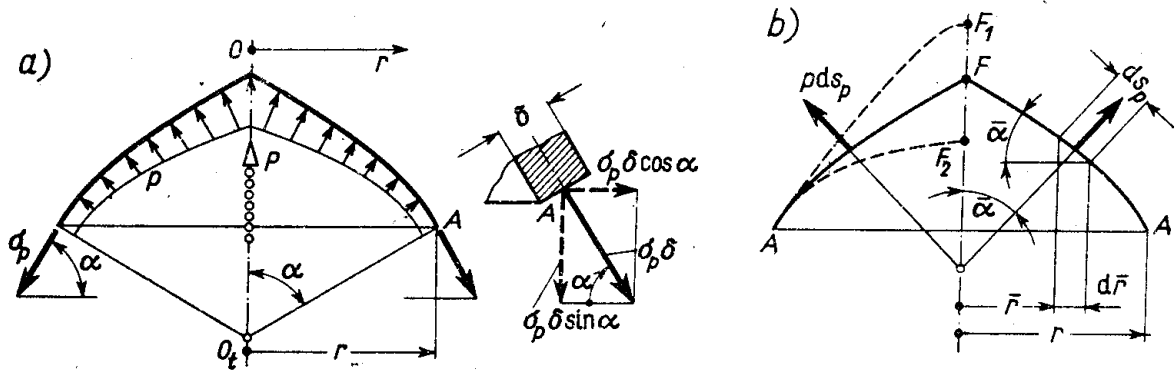
łącznie z obciążeniem zewnętrznym $p ds_p ds_t$ otrzymujemy po zaniedbaniu małych trzeciego rzędu warunków równowagi

$$-(\sigma_p \delta ds_t)(ds_p/\varrho_p) - (\sigma_t \delta ds_p)(ds_t/\varrho_t) + p ds_p ds_t = 0,$$

przybierającą po przekształceniu postać tzw. równania Laplace'a

$$\frac{\sigma_p}{\varrho_p} + \frac{\sigma_t}{\varrho_t} = \frac{p}{\delta}. \tag{12.12a}$$

Poza powyższym można sformułować dla elementu ABCD także warunek równowagi rzutów sił na oś powłoki. Prościej jednak zrobić to nie dla elementu, lecz dla skończonej



Rys. 12.23. Równowaga skończonego odcinka powłoki

części powłoki odciętej równoleżnikami (rys. 12.23a). Jeśli bowiem P jest wypadkową obciążenia działającego na całą tę część, to

$$\sigma_p \delta \sin \alpha \cdot 2\pi r = P. \tag{12.12b}$$

Wartość P zależy od rodzaju obciążenia. W często spotykanym przypadku, gdy $p = \text{const}$, mamy według rys. 12.23b

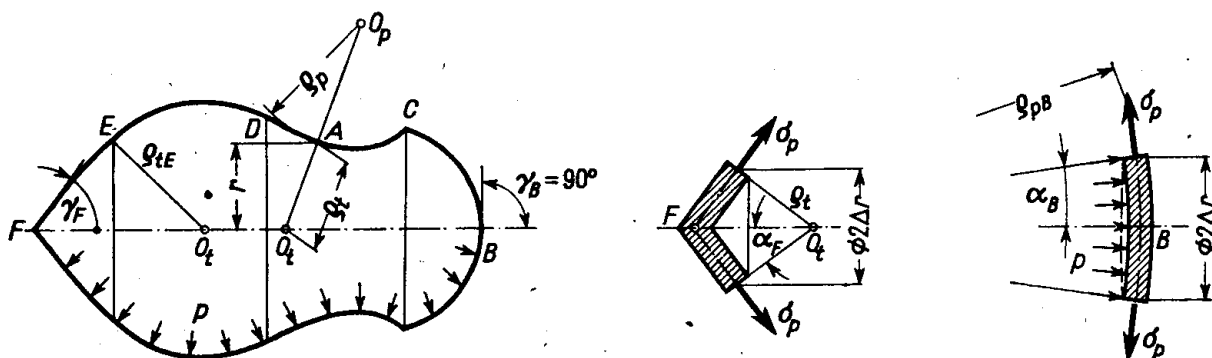
$$P = \int_0^r (p ds_p \cos \bar{\alpha}) 2\pi \bar{r} = 2\pi p \int_0^r \bar{r} d\bar{r} = p\pi r^2, \tag{a}$$

a więc siła P jest równa iloczynowi ciśnienia p przez pole równoleżnika $A-A$ i nie zależy od kształtu południka AF .

Poza naprężeniami σ_p i σ_t obliczonymi z równań (12.12) między elementarnymi warstwami płaszczy działają naprężenia σ_3 prostopadle do powierzchni środkowej. Zauważmy jednak, że wartości σ_3 są rzędu p i są całkowicie pomijalne w porównaniu z σ_p i σ_t , które według (12.12a) są rzędu $p \varrho_p / \delta$ lub $p \varrho_t / \delta$. Z tego powodu w ocenie bezpieczeństwa traktujemy stan napięcia jako dwuwymiarowy, a wartość σ_{red} obliczamy wykorzystując wzór (11.12), czyli

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma_p^2 - \sigma_p \sigma_t + \sigma_t^2}. \quad (b)$$

Gdy badany odcinek DAC powłoki jest wklęsły (rys. 12.24), wówczas zależności (12.12) zostają te same, z tym tylko, że $\varrho_p < 0$. Gdy powłoka ma ostry wierzchołek (punkt F),



Rys. 12.24. Analiza niektórych szczegółów w powłoce

wówczas w jego otoczeniu naprężenia σ_p i σ_t , odpowiadające działaniu ciśnienia p są równe zero, albowiem $P = \pi \Delta r^2 p$ i z wzoru (12.12b)

$$\sigma_p = p \Delta r / 2\delta \sin \alpha_F \rightarrow 0, \quad \text{gdy} \quad \Delta r \rightarrow 0,$$

a z wzoru (12.12a)

$$\sigma_t = p \varrho_t / \delta = p \Delta r / \delta \sin \alpha_F \rightarrow 0, \quad \text{gdy} \quad \Delta r \rightarrow 0.$$

W gładkim wierzchołku B sytuacja jest inna, albowiem $P = \pi \Delta r^2 p$, $\alpha_B = \Delta r / \varrho_{pB}$ i wtedy z zależności (12.12) wynika

$$\sigma_p = p \varrho_{pB} / 2\delta, \quad \sigma_t = p \varrho_{tB} / 2\delta = p \varrho_{pB} / 2\delta = \sigma_p,$$

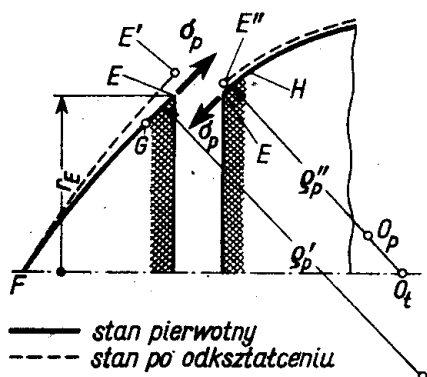
gdyż w otoczeniu punktu B promienie krzywizny ϱ_{pB} i ϱ_{tB} są równe.

Przedstawiony układ naprężeń nazywamy *blonowym*, albowiem odpowiada on powłoce (błonie), której płaszcz jest idealnie giętki. Oddaje on bardzo dobrze warunki pracy rzeczywistych powłok, których płaszcz ma zawsze pewną sztywność na zginanie, jeśli tylko wynikające z niego wnioski nie są sprzeczne z fizycznym obrazem zjawisk. Sprzeczności te występują na ogół w miejscach nieciągłości kształtu południka: jawnych, jak załom C na rys. 12.24, lub ukrytych, jak punkty E i D , gdzie występują przeskoki promieni ϱ_p . I tak w punkcie E (rys. 12.25) przeskok z ϱ'_p na ϱ''_p powoduje przeskok wartości σ_t oraz odkształceń obwodowych ε_t , a to z kolei sprawia, że przyrosty promienia r_E , czyli EE' i EE'' , są różne. Ponieważ w rzeczywistości takiej nieciągłości odkształceń nie ma, stąd wynika

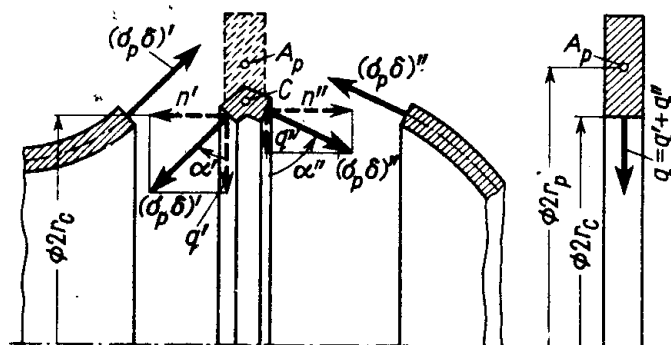
zatem, że w miejscu złączenia E musi wystąpić stan napięcia odmienny od błonowego. Badania teoretyczne wykazały, że to zaburzenie stanu błonowego ma wybitnie lokalny charakter i obejmuje strefę, której szerokość $a = EG = EH$ jest rzędu

$$a \approx \sqrt{r_E \delta} |e'_p - e''_p| / (|e'_p| + |e''_p|)$$

i maleje wraz z różnicą promieni $e'_p - e''_p$.



Rys. 12.25. Nieciągłość odkształceń przy przeskoku e_p



Rys. 12.26. Statyka załomu i pierścienia wzmacniającego

Z kolei zbadajmy sytuację w załomie C (rys. 12.26). W tym celu rozcinamy powłokę na trzy części: lewą, prawą i środkowy cienki pierścień C uwidaczniając przy tym oddziaływania, których natężenie na jednostkę długości obwodu $(\sigma_p \delta)'$ i $(\sigma_p \delta)''$ obliczono z wzoru (12.12b), czyli przy założeniu błonowego stanu napięcia. Zauważmy, że składowe n' i n'' są według (12.12b)

$$n' = n'' = P/2\pi r_c \quad (c)$$

i ich działanie na pierścień znosi się. Pozostaje natomiast wypadkowe obciążenie promieniowe o natężeniu

$$q = q' + q'' = n' \operatorname{ctg} \alpha' + n'' \operatorname{ctg} \alpha'' = (P/2\pi r_c) (\operatorname{ctg} \alpha' + \operatorname{ctg} \alpha''), \quad (d)$$

powodujące ściskanie pierścienia w kierunku obwodowym. Dla utrzymania tych ścisających naprężeń σ_c w rozsądnych granicach musimy pierścień wzmocnić dając mu pole przekroju A_p i wtedy zgodnie z wzorem (2.5) wartość

$$\sigma_c \approx q r_c / A_p. \quad (e)$$

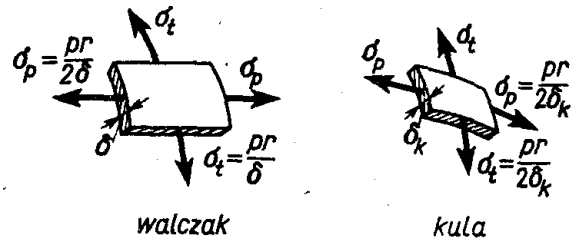
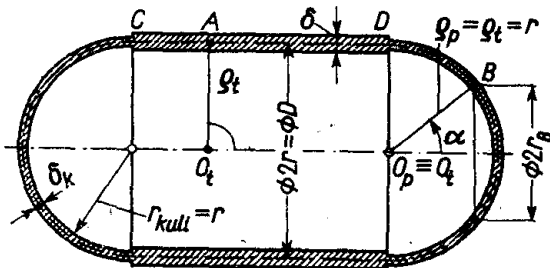
Wprowadzenie pierścienia wzmacniającego załom umożliwia grę sił odpowiadającą stanowi błonowemu, nie likwiduje jednak nieciągłości odkształceń i związanego z tym zaburzenia rozkładu naprężeń, jak opisywano poprzednio. To ostatnie zaburzenie, wyrażone wzrostem naprężeń, jest rzędu naprężeń błonowych, podczas gdy zaburzenie, które by wystąpiło w załomie niewzmocnionym, wyrażałoby się wzrostem naprężeń rzędu

$$(p r_c / \delta) \sqrt{r_c / \delta}, \quad (f)$$

a więc wielokrotnie większym.

Zadania

1. Wyznaczyć wartości σ_p i σ_t wywołanych ciśnieniem p w zbiorniku złożonym z walczaka CD i półkulistych den (rys. 12.27).



Rys. 12.27. Analiza powłoki walcowej i kulistej

Rozwiązanie. Południk walczaka CAD jest prostą równoległą do osi, wobec czego promienie: $\varrho_p = \infty$, $\varrho_t = r$, a kąt $\alpha = 90^\circ$. Podstawiając te dane do równań (12.12) mamy

$$\sigma_p = \frac{\pi r^2 p}{2\pi r \cdot 1 \cdot \delta} = \frac{pr}{2\delta} = \frac{pD}{4\delta}, \quad \sigma_t = \frac{p\varrho_t}{\delta} = \frac{pr}{\delta} = \frac{pD}{2\delta}.$$

Dla kulistego dna mamy $\varrho_p = \varrho_t = r = \text{const}$, a w dowolnym punkcie B jest $\sin \alpha = r_B/r$, wobec czego z równań (12.12)

$$\sigma_p = \frac{\pi r_B^2 p}{2\pi r_B \delta_k \sin \alpha} = \frac{pr}{2\delta_k}, \quad \sigma_t = \frac{p\varrho_t}{\delta_k} = \frac{\sigma_p \varrho_t}{r} = \frac{pr}{2\delta_k}.$$

Tak więc w walczaku naprężenia obwodowe są dwa razy większe od południkowych, a w czaszy kulistej są one sobie równe.

2. Jaki ma być stosunek grubości δ_k/δ czaszy i walczaka z zadania 1, aby: a) współczynnik bezpieczeństwa był ten sam; b) w miejscach C i D odkształcenia stanu błonowego były jednakowe?

Odp. a. Biorąc wartości σ_r i σ_t jak wyżej, mamy z wzoru (b)

$$(\sigma_{\text{red}})_{\text{walczak}} = (pr/2\delta)\sqrt{3}, \quad (\sigma_{\text{red}})_{\text{kula}} = pr/2\delta_k$$

i z równości σ_{red} wynika $\delta_k/\delta = 1/\sqrt{3} \approx 0,58$.

b. Aby w miejscu C po odkształceniu nie było różnicy promienia r walczaka i kulistej czaszy, odkształcenia obwodowe ε_t muszą być równe

$$(\varepsilon_t)_{\text{walczak}} = \frac{1}{E} (\sigma_t - \nu\sigma_r)_{\text{walczak}} = (\varepsilon_t)_{\text{kula}} = \frac{1}{E} (\sigma_t - \nu\sigma_r)_{\text{kula}}$$

i po wstawieniu wyników z zadania 1 mamy dla $\nu = 0,3$

$$\delta_k/\delta = (1-\nu)/(2-\nu) \approx 0,41.$$

W praktyce istotniejszy jest warunek (a) i tak zazwyczaj kształtujemy połączenie kulistej czaszy i walczaka.

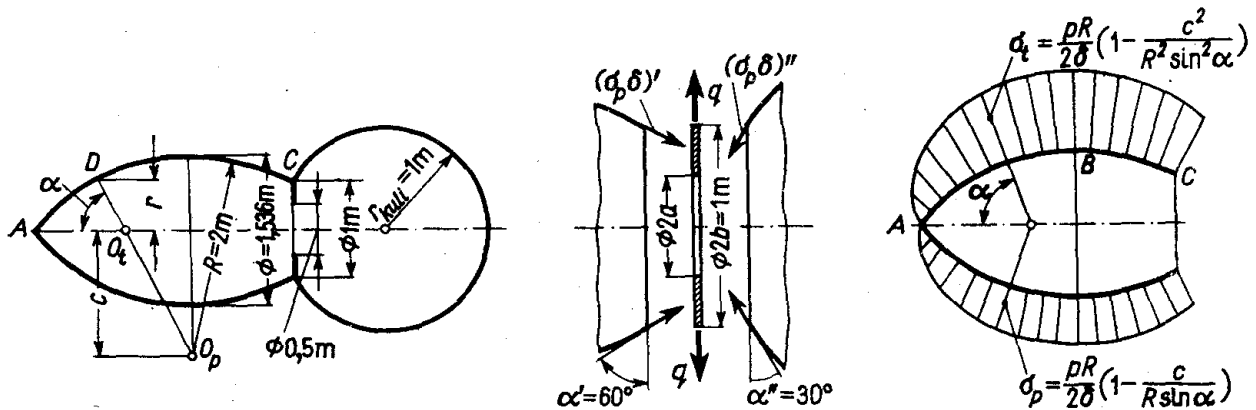
3. Poddany ciśnieniu $p = 2 \text{ MPa}$ zbiornik złożony z owaloidu ABC i czaszy kulistej wzmocniony jest w załomie C pierścieniową przeponą (rys. 12.28). Jaka ma być jej grubość δ , jeśli wymagany współczynnik bezpieczeństwa $n_e = 1,5$, zaś $R_e = 300 \text{ MPa}$?

Rozwiązanie. Wzcrując się na rys. 12.26 wyznaczamy z wzoru (c) poosiową składową $n' = n''$ oddziaływań $(\sigma_p \delta)'$ i $(\sigma_p \delta)''$

$$n' = n'' = pb/2 = 2 \cdot 10^6 \cdot 0,5/2 = 0,5 \cdot 10^6 \text{ N/m},$$

a następnie z wzoru (d) przy $\alpha' = 60^\circ$ i $\alpha'' = 30^\circ$

$$q = n'(\text{ctg } 60^\circ + \text{ctg } 30^\circ) = 0,5 \cdot 10^6 [(1/\sqrt{3}) + \sqrt{3}] = 1,155 \cdot 10^6 \text{ N/m}$$



Rys. 12.28. Analiza pracy załomu i zbiornika owaloidalnego

jako promieniowe obciążenie pierścieniowej tarczy (przepony). Wykorzystując z kolei wyniki z rys. 11.6, przy $S_b = q/\delta$, mamy z wzoru (e) art. 11.2 po przekształceniach

$$\delta = \frac{2qb^2}{(b^2 - a^2) \sigma_{red}} = \frac{2qb^2 n_e}{(b^2 - a^2) R_e} = \frac{2 \cdot 1,155 \cdot 10^6 \cdot 0,5^2 \cdot 1,5}{(0,5^2 - 0,25^2) 300 \cdot 10^6} = 1,53 \cdot 10^{-2} \text{ m} = 15,3 \text{ mm}.$$

4. Z badać rozkład naprężeń σ_p i σ_t w owaloidalnej części zbiornika z zadania 3. Grubość ścianki $\delta = 1 \text{ cm}$.

Odp. Wyrażając wszystkie wielkości w funkcji kąta α :

$$r = R \sin \alpha - c, \quad \varrho_t = \overline{DO}_t = (R \sin \alpha - c) / \sin \alpha, \quad \varrho_p = R = \text{const},$$

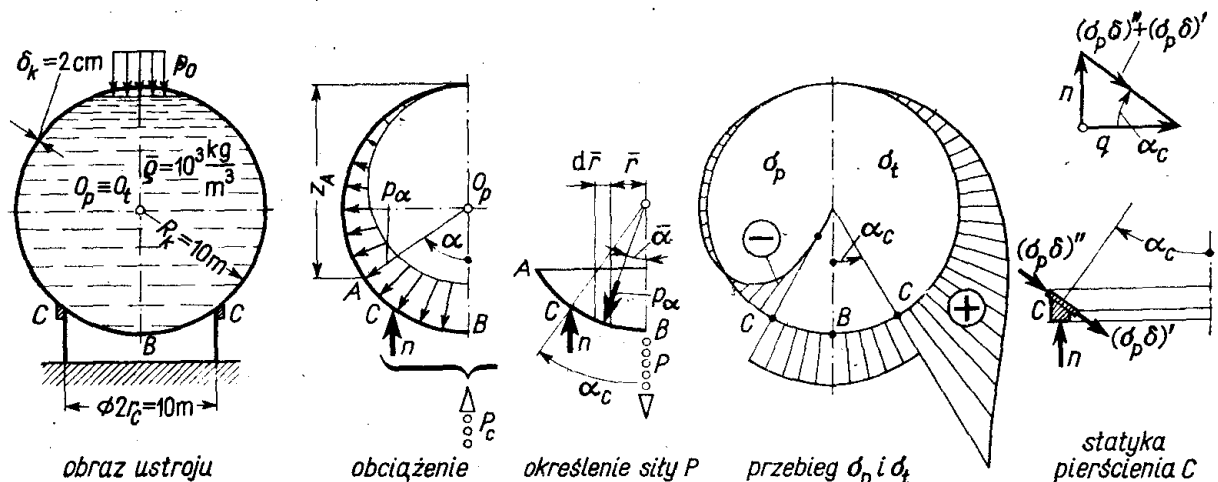
mamy z wzorów (12.12) i wzoru (a)

$$\sigma_p = \frac{pR}{2\delta} \left(1 - \frac{c}{R \sin \alpha} \right), \quad \sigma_t = \frac{pR}{2\delta} \left(1 - \frac{c^2}{R^2 \sin^2 \alpha} \right).$$

Przebieg tych naprężeń wzdłuż łuku ABC podaje rysunek. Niebezpieczny jest punkt B , w którym $\alpha = 90^\circ$, a wartości

$$(\sigma_p)_B \approx 77 \text{ MPa}, \quad (\sigma_t)_B \approx 124 \text{ MPa}, \quad \sigma_{red} \approx 108 \text{ MPa}.$$

5. Kulisty nieważki zbiornik oparty na cylindrycznym płaszczu CC (rys. 12.29) wypełniono cieczą o gęstości \bar{q} , przy czym naciśnienie $p_0 = 0$. Wyznaczyć przebieg naprężeń σ_p i σ_t w zbiorniku oraz określić siłę obwodową w pierścieniu C .



Rys. 12.29. Analiza napięć w zbiorniku kulistym

Rozwiązanie. Obciążenie zbiornika stanowią: reakcja płaszcza CC równa ciężarowi cieczy $P_c = 4\pi R^3 \bar{\rho} g/3$, o natężeniu

$$n = P_c/2\pi r_c$$

oraz ciśnienie równe ciężarowi słupa cieczy o wysokości z_A

$$p_x = \bar{\rho} g z_A = \bar{\rho} g R (1 + \cos \alpha).$$

Dla dolnej części płaszcza wypadkowa siła P obliczona podobnie jak przy formułowaniu wzoru (a) i podstawieniu $\bar{r} = R \sin \bar{\alpha}$ jest

$$\begin{aligned} P &= \int_0^\alpha p_x d\bar{r} 2\pi\bar{r} - P_c = \int_0^\alpha \bar{\rho} g R (1 + \cos \bar{\alpha}) 2\pi R \sin \bar{\alpha} R \cos \bar{\alpha} d\bar{\alpha} - P_c = \\ &= (\pi/3) \bar{\rho} g R^3 [5 - \cos^2 \alpha (3 + 2 \cos \alpha)] - (4\pi/3) \bar{\rho} g R^3. \end{aligned}$$

Gdy kąt $\alpha < \alpha_c$, wówczas we wzorze powyższym nie ma ostatniego składnika, czyli siły P_c . Uwzględniając to mamy z wzoru (12.12b)

$$\sigma_p = \frac{\bar{\rho} g R^2}{6\delta} \left(5 + \frac{2 \cos^2 \alpha}{1 + \cos \alpha} \right), \text{ gdy } \alpha < \alpha_c, \quad \sigma_p = \frac{\bar{\rho} g R^2}{6\delta} \left(1 - \frac{2 \cos^2 \alpha}{1 - \cos \alpha} \right), \text{ gdy } \alpha > \alpha_c.$$

Podstawiając te wielkości do równania (12.12a), znajdujemy

$$\begin{aligned} \sigma_t &= \frac{\bar{\rho} g R^2}{6\delta} \frac{1 + 7 \cos \alpha + 4 \cos^2 \alpha}{1 + \cos \alpha}, \text{ gdy } \alpha < \alpha_c, \\ \sigma_t &= \frac{\bar{\rho} g R^2}{6\delta} \frac{5 + \cos \alpha - 4 \cos^2 \alpha}{1 - \cos \alpha}, \text{ gdy } \alpha > \alpha_c. \end{aligned}$$

Podane na rysunku przebiegi σ_p i σ_t wykazują przeskoki na podparciu CC , przy czym σ_p zmienia nie tylko wartość, lecz i znak. Widać, że niebezpieczne jest miejsce tuż powyżej pierścienia CC . Biorąc dane liczbowe jak na rysunku i $\alpha_c = 30^\circ$ mamy

$$\sigma_p = -83 \text{ MPa}, \quad \sigma_t = 172 \text{ MPa}, \quad \sigma_{red} = 225 \text{ MPa}.$$

Raptowny wzrost wartości σ_p i σ_t w otoczeniu pierścienia CC można zmniejszyć zwiększając r_c . Dając na przykład $r_c \approx 7,1$ m, czyli $\alpha_c = 45^\circ$, zmniejszamy wartość σ_{red} około dwa razy.

Na obciążenie jednostki długości pierścienia składają się: różnica sił wynikających z przeskoku wartości σ_p

$$(\sigma_p \delta)' - (\sigma_p \delta)'' = \frac{\bar{\rho} g R^2}{6} \left(5 + \frac{2 \cos^2 \alpha_c}{1 + \cos \alpha_c} \right) - \frac{\bar{\rho} g R^2}{6} \left(1 - \frac{2 \cos^2 \alpha_c}{1 - \cos \alpha_c} \right) = \frac{2\bar{\rho} g R^2}{3 \sin^2 \alpha_c}$$

oraz pionowa reakcja płaszcza n . Łatwo sprawdzić, że pierwsza z tych sił jest równa $n/\sin \alpha_c$, a wypadkowe obciążenie na jednostkę długości $q = n \operatorname{ctg} \alpha_c$ jest poziome, czyli działa w płaszczyźnie pierścienia i wywołuje w pierścieniu ściskającą siłę obwodową

$$N = q r_c = (P_c/2\pi) \operatorname{ctg} \alpha_c = 2\bar{\rho} g R^3 \operatorname{ctg} \alpha_c/3 = 11,32 \cdot 10^3 \text{ kN}.$$

6. Jak zmieniają się wyniki poprzedniego zadania, jeśli na swobodną powierzchnię cieczy działa nadciśnienie p_0 ?

Odp. Naprężenia σ_p i σ_t wzrosną o $p_0 R/2\delta$ (zasada superpozycji).